15533

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1995 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1995 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1995

ව්‍යවහාරික ගණිතය I
பிரயோக கணிதம் I
APPLIED MATHEMATICS I

02 | S | I

පැය තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. P, Q, R හා S යනු පිළිවෙළින් $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{q}$, $\overrightarrow{OR} = \mathbf{r}$ හා $\overrightarrow{OS} = \mathbf{s}$ පිහිටුම් දෛශික සහිත ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය හතරකි. P, Q, R, S ඒකරේඛීය වෙයි නම්

$$\mathbf{r} = (1-\alpha)\,\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q} \quad \text{ද}$$

$$\mathbf{s} = (1-\beta)\,\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} \quad \text{ද}$$

වන පරිදි α හා β යන නිශ්-ශූන්‍ය සංඛ්‍යා දෙකක් පවතින බව පෙන්වන්න.

P, Q, R, S ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් ABCD තල චතුරස්‍රයේ DA, AB, CD හා BC පාද මත පිහිටන්නේ $\overrightarrow{DP} = \gamma\,\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AQ} = \lambda\,\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{CR} = \upsilon\,\overrightarrow{RD}$, $\overrightarrow{BS} = \mu\,\overrightarrow{SC}$ වන පරිදි ය. මෙහි $\lambda\mu\upsilon\gamma \neq 0$ වේ. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ හා $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$, නම්, මූල ලක්ෂ්‍යය A ලෙස ගෙන එය අනුබද්ධයෙන් P, Q, R, S ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික, $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \lambda, \mu, \upsilon, \gamma$ ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, P, Q, R, S සරල රේඛාවක් මත පිහිටයි නම්, $\lambda\mu\upsilon\gamma = 1$ බව පෙන්වන්න.

2. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ හා $\mathbf{c}$ යනු ඕනෑම නිශ්-ශූන්‍ය දෛශික තුනක් යැයි සිතමු. $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{b}$ අදිශ ගුණිතය ජ්‍යාමිතික ලෙස විවරණය කරන්න. ඒ නයින්,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

බව සාධනය කරන්න.

OAB ත්‍රිකෝණයේ $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ද $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ ද යැයි සිතමු. $OA > OB$ යැයි සිතමු. L හා M යනු පිළිවෙළින්,

$$\overrightarrow{OL} = \mathbf{l} = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\,\mathbf{b} \quad \text{ද}$$

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{m} = \mu\mathbf{a} + (1-\mu)\,\mathbf{b} \quad \text{ද}$$

යන පිහිටුම් දෛශික සහිත ලක්ෂ්‍ය වේ. OL හා OM රේඛා මගින් පිළිවෙළින් අභ්‍යන්තර ලෙසත් බාහිර ලෙසත් AOB කෝණය සමච්ඡේදනය වන පරිදි λ හි හා μ හි අගය, අදිශ ගුණිත උපයෝගී කර ගෙන, $a = |\mathbf{a}|$ හා $b = |\mathbf{b}|$ ඇසුරෙන් නිර්ණය කරන්න.

(i) $\dfrac{AL}{LB} = -\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{OA}{OB}$ බවත්

(ii) $\overrightarrow{LM} = \dfrac{2ab}{a^2-b^2}\,(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ බවත්

අපෝහනය කරන්න.

3\. (i) $OABC$ යනු චතුස්තලයකි. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ හා $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ වේ. $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$ හා $\mathbf{s}_4$ යනු පිළිවෙළින් OAB, OBC, OCA හා ABC මුහුණත්වල වර්ගඵලවලට සමාන විශාලත්ව ඇති දෛශික යැයි ද ඒවා පිළිවෙළින් මුහුණත්වලට ලම්බ ලෙස පිටි අතට එල්ල වී ඇතැයි ද සිතමු.

$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ ජ්‍යාමිතික ලෙස විවරණය කරන්න. $\dfrac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{s}_1|} + \dfrac{|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|}{|\mathbf{s}_2|} + \dfrac{|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{s}_3|}$ සොයන්න.

තව ද, $\sum_{i=1}^{4} \mathbf{s}_i$ සොයන්න.

(ii) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ යනු $Oxyz$ සුරත් සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය ඛණ්ඩාංක පද්ධතියක පිළිවෙළින් Ox, Oy හා Oz අක්ෂවල ධන දිශා ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශිකයි.

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ ද} \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \text{ ද} \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{j} + c_2\mathbf{k} \text{ ද}$$

යැයි සිතමු; මෙහි $b_1 \neq 0$ වේ. $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ සොයා, ඒ නයින්,

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (c_1 + c_2)\,\mathbf{b} - (b_1 + b_2 + b_3)\,\mathbf{c}$$

බව සාධනය කරන්න.

තව ද, $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 2\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$ සහ $|\mathbf{c}| = \sqrt{2}$ බව දී තිබෙන විට $\mathbf{b}$ හා $\mathbf{c}$ දෛශිකවල සංරචක සොයන්න.

4\. දෘඩ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතව තබා ගනියි නම් එක්කෝ ඒවා ලක්ෂ්‍යයෙක දී හමු විය යුතු බව නැතහොත් සමාන්තර විය යුතු බව පෙන්වන්න.

බර W ද අරය r ද වූ ඒකාකාර සුමට අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව තිබෙයි. $2l$ දිගින් හා W බරින් යුත් ඒකාකාර දණ්ඩක් නිසලව පවතින්නේ එහි කොටසක් පාත්‍රය ඇතුළේ පිහිටන පරිදි ය. තිරසට අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ ආනතිය $\frac{\pi}{6}$ වෙයි. තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය $\theta \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ ද පාත්‍රයේ ගැටියේ දී ප්‍රතික්‍රියාව R ද නම්, ජ්‍යාමිතික ලෙස හෝ අන් අයුරකින් හෝ

(i) $\theta = \frac{1}{2}\left[\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{\pi}{6}\right]$ බවත්

(ii) $l = \frac{1}{2} r \sec\theta$ බවත්

(iii) $R = \dfrac{W}{(8 + \sqrt{3} - \sqrt{15})^{\frac{1}{2}}}$ බවත්

සාධනය කරන්න.

5\. යුග්මක ඝූර්ණය අර්ථ දක්වන්න. G_1, G_2 ඝූර්ණ සහිත ඒකතල යුග්ම දෙකෙක සම්ප්‍රයුක්තයත් යුග්මයක් බව පෙන්වා එහි ඝූර්ණය සොයන්න.

සෘජුකෝණාස්‍ර ඛණ්ඩාංක පද්ධතියක් අනුබද්ධයෙන්, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ වූ, (x_i, y_i) ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරන (X_i, Y_i) ඒකතල බලපද්ධතියක් එක්කෝ (X, Y) තනි බලයකට හෝ G යුග්මයකට හෝ ඌනනය වන බවත් නැති නම් සමතුලිතතාවෙන් පවතින බවත් පෙන්වන්න.

මෙහි පළමු වැනි අවස්ථාවේ දී බල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

ඕනෑම ලක්ෂ්‍ය තුනක් වටා ඒකතල බල පද්ධතියක ඝූර්ණ එක එකක් ශූන්‍ය වෙයි නම් පද්ධතිය සමතුලිතතාවෙන් පිහිටන බව අනුගමනය වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

6. එක එකක් W බරින් යුත් සමාන ඒකාකාර AB, AC දඬු දෙකක් A හි දී සුවල ලෙස සන්ධි කර ඒවායේ B සහ C දෙකෙළවර ලුහු තන්තුවක් මගින් සම්බන්ධ කර තිබෙයි. B හා C සමමිතික ලෙස තිරස්වලතාවේ පිහිටා ඇත්තේ එක එකක් තිරසට $\alpha \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත වූ ද එක සමාන රළු වූ ද ආනත තල දෙකක් මත ය. ආනත තලවල බෑවුම් එකක් අනිකට මුහුණ ලා ඇති අතර දඬුවල තලය සිරස් ය. BAC කෝණය 2θ ද B හා C දෙකෙළවරේ දී ම ඝර්ෂණ කෝණය β ද විට දඬු සීමාකාරී සමතුලිතතාවෙන් පවතියි. තන්තුවේ T ආතතිය

$$T = \frac{1}{2} W \tan \theta + W \tan (\beta - \alpha)$$

යන්නෙන් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

A සන්ධියේ දීත් B කෙළවරේ දීත් AB දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. තව ද

$$\frac{BP}{AB} = \frac{\cos \theta}{\cos (\alpha - \beta)}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි P යනු එම ප්‍රතික්‍රියා දෙකේ ක්‍රියාරේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යි.

7. අරය r වූ සිහින් ඒකාකාර අර්ධගෝලීය කබොළක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරෙකින් හෝ a අරයෙන් යුත් ඝන ඒකාකාර අර්ධගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරෙකින් එහි සමමිති අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

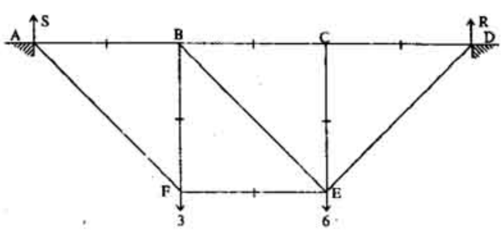
සංවෘත බඳුනක්, සිහින් ඒකාකාර අර්ධගෝලීය කබොළකින් හා එම සිහින් ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයෙන් ම තැනූ තල වෘත්ත ආධාරකයකින් සමන්විත වෙයි. මේ එක් එක් කොටසේ අරය a ට සමාන ය. බඳුන සම්පූර්ණයෙන් ම ජලයෙන් පුරවා දාරයෙහි වූ ලක්ෂ්‍යයෙකින් එල්ලූ විට, එහි ආධාරකය යටිඅත් සිරසට θ කෝණයකින් ආනතව සමතුලිතතාවේ පවතියි. කබොළ තනා ඇති ද්‍රව්‍යයේ විශිෂ්ට ගුරුත්වය කුමක් වුවද

$$\frac{1}{3} < \tan \theta < \frac{3}{8}$$

බව පෙන්වන්න.

බඳුනේ බරේත් ජලයේ බරේත් අනුපාතය θ ඇසුරෙන් සොයන්න.

8. A හි දීත් D හි දීත් නිදහස් ලෙස ආධාරක මත පිහිටි පාලම්ක ගේඩරයක් රූපයෙන් නිරූපණය කෙරෙයි. මේ රාමුසැකිල්ල සමන්විත වන්නේ ලුහු දඬු නවයකිනි. ඒවා අතුරෙන් හයක්, එනම් AB, BC, CD, BF, CE හා FE දඬු එක එකක් 1 m දිග වන අතර අනෙක් දඬු තුන, එනම් AF, BE, ED එක එකක් $\sqrt{2}$ m දිගින් යුක්ත ය. රූපයේ දක්වෙන පරිදි මෙට්‍රික් ටොන් 3 ක හා 6 ක භාර පිළිවෙළින් F හි හා E හි දී එල්ලා තිබෙයි. D ආධාරකයේ ප්‍රතික්‍රියාව R සිරස් බලයක් යැයි උපකල්පනය කර R සොයන්න. අනුපිළිවෙලින් D, C, E, F, B හා A සන්ධිවලට බෝ අංකනය යොද ගනිමින් ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින් S හි අගය සොයා දඬු සියල්ලේ ම ප්‍රත්‍යාබල නිර්ණය කර ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න වෙන් වෙන් ව දක්වන්න.



[අනෙක් පිට බලන්න.

9. "ඝර්ෂණ කෝණය" යන පදය අර්ථ දක්වන්න.

(අ) W බරින් යුත් ඒකාකාර ඝන ගෝලයක්, තිරසට α ආනතියක් සහිත, ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වූ රළු තලයක් මත නිසලව ඇත්තේ ගෝලයේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයටත් තලයටත් ඇඳූ තිරස් තන්තුවක ආධාරයෙනි. $\alpha \leq 2\tan^{-1}(\mu)$ බව පෙන්වන්න. තන්තුවේ උපරිම ආතතිය සොයන්න.

(ආ) W බරින් යුත් ඒකාකාර ඝන ගෝලයක් රළු සිරස් බිත්තියකට හේත්තු වී නිසලව තබා ඇත්තේ බිත්තියේ හා ගෝලයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයට සිරස් ලෙස ඉහළින් බිත්තියේ වූ අචල ලක්ෂ්‍යයටත් ගෝලයටත් ඇඳූ තන්තුවක් මගිනි. තන්තුව යටියත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන අතර සමතුලිතතාව සීමාකාරී අවස්ථාවේ වෙයි. λ යනු ඝර්ෂණ කෝණය නම් තන්තුවේ ආතතිය සොයා, θ හි විවිධ අගයයන් සඳහා ආතතියේ අඩුතම අගය $W\cos\lambda$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, λ ට $\cos^{-1}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right]$ නො ඉක්මවිය හැකි බව ජ්‍යාමිතික ලෙස පෙන්වන්න.

10. (අ) වේල්ලක ජල මුහුණත ත්‍රපීසියමක ආකාරය ගනියි. පතුලේ පළල මීටර a වන අතර මුදුනේ පළල මීටර $a + b$ වෙයි. වේල්ලේ මුහුණත සිරස් ය. ජලය මට්ටම වේල්ලේ මුදුන් මට්ටමට සම වන විට ජලයේ ගැඹුර මීටර h වෙයි.

(i) වේල්ල මත සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම නිව්ටන $\frac{w}{6}h^2(3a+b)$ බවත්

(ii) පීඩන කේන්ද්‍රයේ ගැඹුර මීටර $\frac{(4a+b)h}{2(3a+b)}$ බවත්

පෙන්වන්න; මෙහි w යනු $\mathrm{kg\,m^{-3}}$ වලින් වූ ජලයේ ඝනත්වයයි.

(ආ) තිරස් ඇළක හරස්කඩ වූකලී පිළිවෙළින් පතුලේ දිග් මුදුනේ දිග් 1 m ද 2 m ද වූ ත්‍රපීසියමකි. ඇලේ ගැඹුර 1 m කි. උඩු දාරයේ දී විවර්තනී කළ සිරස් දොරක් මගින් ඇළ වසා ඇත්තේ දොරට ලම්බ ලෙස යටි දාරයේ මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යයට තිරස් F බලයක් යෙදීමෙනි. ඇළ ජලයෙන් පිරී ඇති විට,

$$F = \text{නිව්ටන } \frac{5w}{12}$$

බව පෙන්වන්න; මෙහි w යනු ජලයේ ඝනත්වය යි.

11. a අරයෙන් යුත් සංවෘත තල වෘත්ත කෙළවර සහිත උස h වූ සෘජුවෘත්ත කුහර සිලින්ඩරයක් ρ ඝනත්වයෙන් යුත් ද්‍රවයකින් සම්පූර්ණයෙන් ම පුරවා, එහි අක්ෂය තිරස සමග θ කෝණයක් සෑදෙන පරිදි අචලව රඳවා තිබෙයි. තල කෙළවර මත සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම්වල, විශාලත්වය, දිශා හා ක්‍රියාරේඛා සොයා, දරා සිටින ද්‍රවයේ G කේන්ද්‍රකය වටා සමාන වූද ප්‍රතිවිරුද්ධ වූද ඝූර්ණ ඒවාට තිබෙන බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම

$$\pi a^2 h\rho g\cos\theta$$

විශාලත්වයෙන් යුක්ත බවත් එහි ක්‍රියාරේඛාවෙන් අක්ෂය සෘජුකෝණී ලෙස සමච්ඡේදනය වන බවත් පෙන්වන්න.

12. ද්‍රවස්ථිතිකයේ එන ආකිමිඩීස් මූලධර්මය ප්‍රකාශ කර එය සාධනය කරන්න.

නැවක බඳෙහි යම් අචල තිරස් සලකුණක් ලකුණු කර ඇත. නිශ්චල මුහුදු ජලයේ නැව ඉපිලෙන විට එම සලකුණ ජල රේඛා කඩ හා එකම මට්ටමේ පිහිටයි. මිරිදිය නැව් තටාකයක නැව ඉපිලෙන්නට සැලැස්සූ විට එය මීටර h ගිලා බසියි. මෙට්‍රික් ටොන් C බර බඩු ප්‍රමාණයක් ගොඩ බැ පසු සලකුණ මීටර H දුරක් ඉහළ නැගුණු බව දක්නා ලදී. ජල රේඛා කඩ අසල නැවේ බඳ සිරස් යැයි ද මුහුදු ජලයේ විශිෂ්ට ගුරුත්වය 1·026 යැයි ද උපකල්පනය කර, බඩු ගොඩ බැමට පෙර නැවේ සහ බඩුබාහිරාදියේ බර

$$\text{මෙට්‍රික් ටොන් } \frac{513\,hC}{13\,H}$$

බව පෙන්වන්න.